

# *Considerações metodológicas sobre a recta de Euler e o círculo dos 9 pontos, e sobre os triângulos em posição de Cavalieri*

José Alberto Garcia Suárez

Em esta comunicação tratam-se aspectos da geometria do triângulo nos que trabalhei ultimamente, que considero de interesse metodológico por propiciar umha visualização das relações geométricas entre os pontos característicos de um triângulo, ou por facilitar um critério simples para que dous triângulos podam situar-se em posição de Cavalieri.

## *1. A circunferência dos 9 pontos e a recta de Euler de um triângulo*

### **1.0. Introdução**

O ortocentro, o circuncentro e mais o baricentro de um triângulo estão alinhados – este último situado a dobre distância do primeiro que do segundo – sobre umha mesma recta, chamada *recta de Euler*, à qual também pertence – equidistante entre ortocentro e circuncentro – o centro da *circunferência dos 9 pontos*, sobre a que estão os pontos médios dos lados, os pés das alturas e mais os pontos médios dos segmentos com extremos no ortocentro e em cada um dos vértices (denominados *pontos de Euler*). Karl W. Feuerbach (1800-1834) provou que os seis primeiros deles estão numa mesma circunferência, e pouco depois Orly Terquem (1782-1862), que a ela pertencem os três restantes.

A breve demonstração elementar que se desenvolve em esta comunicação, baseia-se exclusivamente na relação angular característica dos quadriláteros cíclicos e, surpreendentemente, não figura entre as elaboradas demonstrações que de este teorema aparecem nos textos habituais, utilizando diversas propriedades “sofisticadas” do triângulo, como que as bissetrizes interior e exterior de cada ângulo abrangem o diâmetro da circunferência circunscrita situado sobre a mediatriz do lado oposto; ou a coincidência das alturas do triângulo com as bissetrizes do seu triângulo órtico (de vértices os pés das alturas).

Ainda que siga a considerar altamente provável – conhecido como é o teorema desde há quase 200 anos – que a alguém mais se lhe tivesse ocorrido esta demonstração antes que a mim, o certo é que nem eu, nem os vários colegas consultados, nem os responsáveis no comité editorial do boletim que estimou de interesse publicá-la, [2], a atopamos. O que poderia explicar, em todo caso, o por que dos textos de secundária não fazem referência à circunferência dos 9 pontos, quando esta demonstração, além da sua simplicidade, salienta de forma clara as configurações poligonais existentes entre esses pontos, formando trapézios e pares de triângulos simétricos a respeito do centro da circunferência.

### **1.1. A circunferência dos 9 pontos e as configurações poligonais entre estes**

*Teorema.* Os três pontos médios dos lados dum triângulo, os pés das alturas e mais os três pontos de Euler, estão na mesma circunferência, situados de modo que os três primeiros formam com cada pé de altura um trapézio isósceles, e os pontos de Euler som

*diametralmente opostos aos pontos médios, formando polo tanto um triângulo simétrico ao que estes formam, a respeito do centro da circunferência.*

Demonstração. Dado o triângulo  $ABC$ , sejam  $A', B', C'$ , os pés das alturas;  $Q, R, S$ , os pontos médios dos lados  $AB, BC, CA$ ;  $O$  o ortocentro; e  $P, P', P''$ , os pontos de Euler. O triângulo  $QBA'$  é isósceles, já que a sua altura  $QQ'$  é paralela média do triângulo  $ABA'$  (Figura 1); e por outra parte  $RS$ , como paralela média de  $ABC$ , mede o mesmo que  $BQ$  e  $A'Q$ , e em consequência  $QA'RS$  é um trapézio isósceles, e polo tanto cíclico. De igual modo se deduz que o som os quadriláteros que tanto  $B'$  como  $C'$  formam com  $Q, R$  e  $S$ , polo qual os seis pontos  $A', B', C', Q, R, S$ , estão numa mesma circunferência.

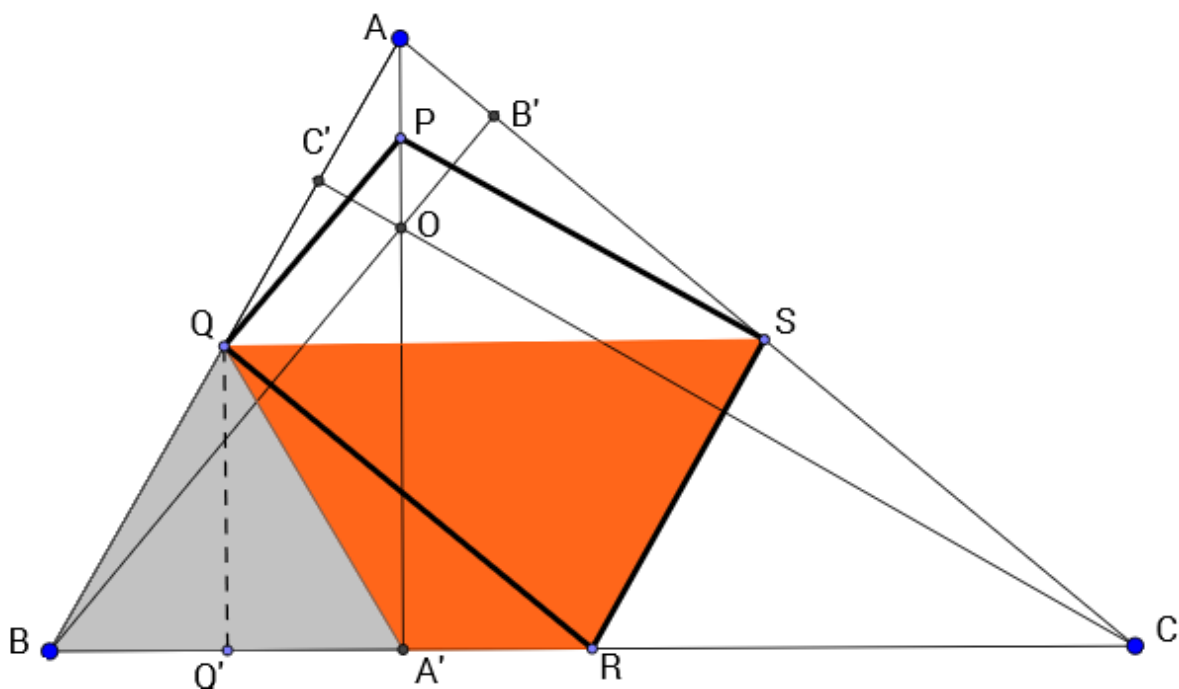


Figura 1

Imos ver agora que o quadrilátero  $PQRS$ , que determina o ponto de Euler  $P$  com os pontos médios dos lados (Figura 1), é cíclico ao serem rectos os ângulos opostos  $PQR$  e  $PSR$ , o qual também implica que  $P$  e  $R$  são pontos diametralmente opostos na circunferência.

Com efeito,  $QP$  é paralelo a  $BO$  que é perpendicular a  $AC$ , paralelo ao segmento médio  $QR$ ; polo tanto  $QP$  e  $QR$  são perpendiculares entre si, e analogamente se prova que  $SP$  é perpendicular a  $SR$ .

Aplicando o mesmo raciocínio, deduz-se que os outros pontos de Euler,  $P'$  e  $P''$ , são diametralmente opostos a  $S$  e  $Q$  respectivamente, resultando assim que os triângulos  $PP'P''$  e  $QRS$  são simétricos a respeito do centro,  $D$ , da circunferência dos 9 pontos (Figura 2).

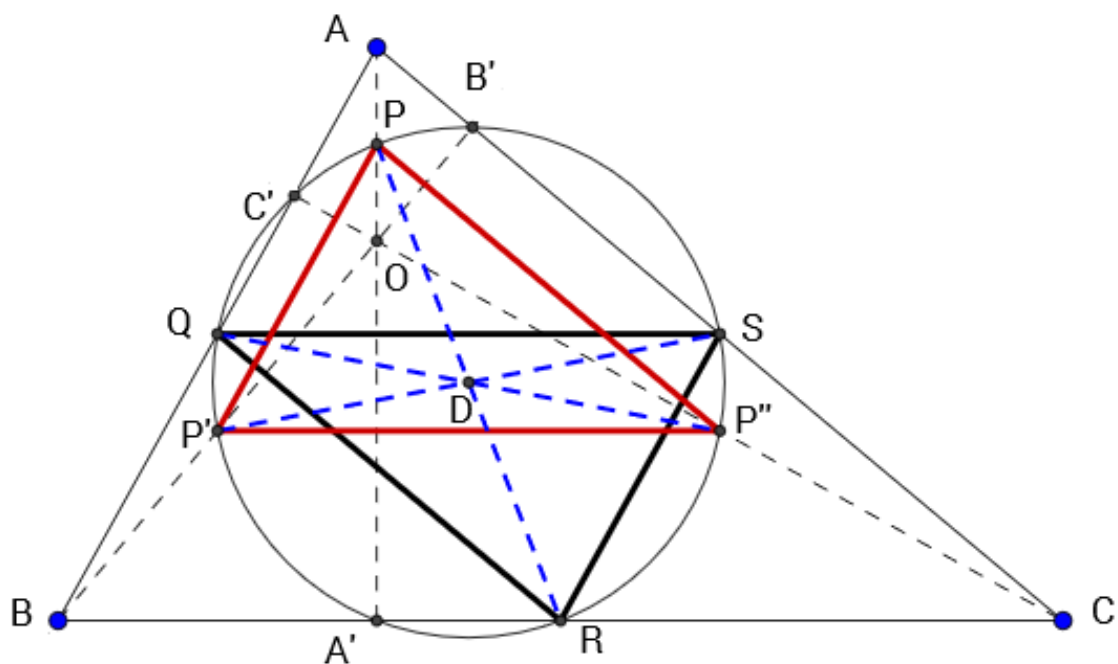


Figura 2

### 1.2. A recta de Euler de um triângulo

*Teorema.* O ortocentro o circuncentro e mais o baricentro – situado este entre os anteriores a dobre distância do primeiro que do segundo – de um triângulo, estão alinhados na denominada recta de Euler, à qual também pertence o centro da circunferência dos 9 pontos, equidistante entre os dois primeiros.

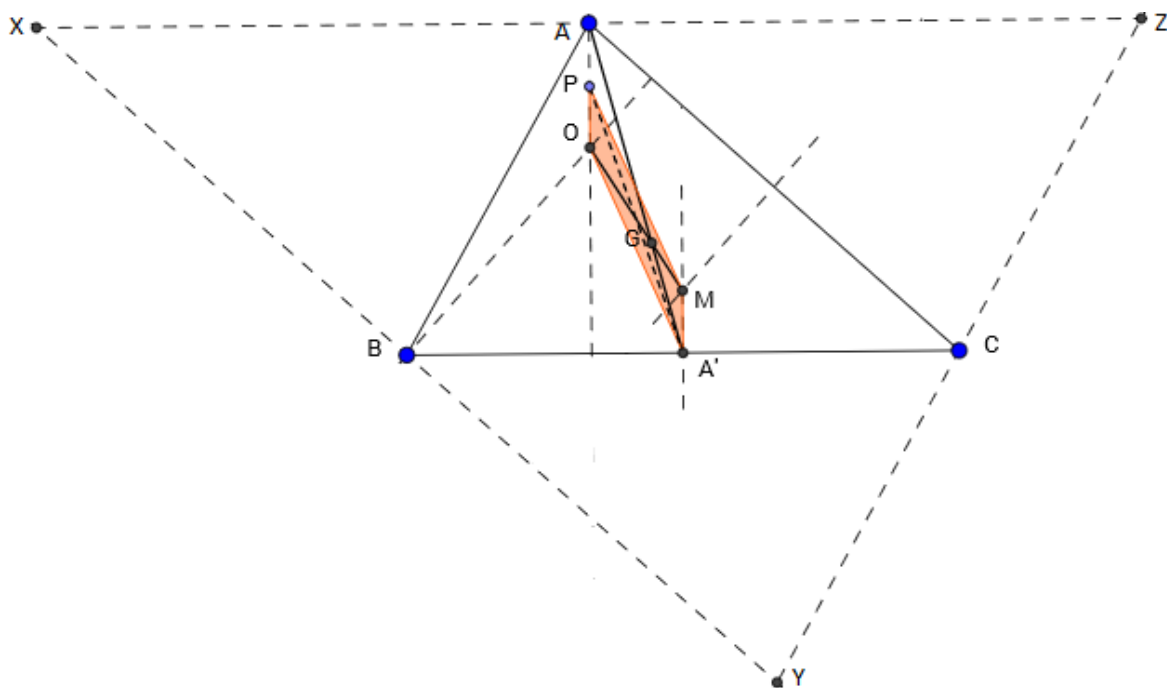


Figura 3

Demostração. Dado o triângulo  $ABC$ , o seu ortocentro,  $O$ , coincide com o circuncentro do triângulo  $XYZ$  de lados paralelos aos seus, cujos pontos médios som os vértices opostos (Figura 3), que é semelhante a ele com razão 2. Pelo tanto, se  $M$  é o circuncentro do primeiro dos triângulos, os segmentos  $AO$  e  $AM'$  som paralelos e a longura do primeiro duplica à do segundo. Consequentemente, se  $G$  é o ponto de intersecção entre o segmento  $OM$  e a mediana  $AA'$ , os triângulos  $AOG$  e  $A'MG$  som semelhantes com razão 2, e também  $AG$  mede o dobre que  $A'G$  e  $OG$  o dobre que  $GM$ ; o qual significa que  $G$  é o baricentro de  $ABC$  e que está a dobre distância de  $O$  que de  $M$ .

Por outra banda, se  $P$  é o ponto de Euler correspondente ao vértice  $A$ , o quadrilátero  $POA'M$  é um paralelogramo que tem por diagonais o segmento  $OM$  da recta de Euler e mais o diâmetro  $PA'$  da circunferência dos 9 pontos; do qual se deduz que o seu ponto de intersecção é o centro da citada circunferência e mais do segmento  $OM$ , como se queria mostrar.

## 2. Triângulos em posição de Cavalieri

### 2.0. Introdução

Di-se que dous triângulos estam em posição de Cavalieri se tres segmentos que tenham por extremos un vértice de cada triângulo som paralelos (eventualmente, algúm pode reduzir-se a um ponto, ou dous estarem sobre a mesma recta). Em tal caso, os triângulos ficam compreendidos entre duas rectas paralelas, e cada paralela intermédia determina sobre os triângulos segmentos que estam na mesma razão que as suas áreas, como se indica na Fig.4 (se som os segmentos com um vértice como extremo,  $BD$  e  $B'D'$ , a proporcionalidade deduz-se exprimindo as áreas de  $ABC$  e  $A'B'C'$  como somas das dos pares de triângulos com esses segmentos como bases comúns; e para os demais pares de segmentos, como  $ST$  e  $S'T'$ , fazendo a descomposição nos triângulos e trapézios sinalados na figura). De serem as áreas iguais, os triângulos dim-se *Cavalieri-congruentes*.

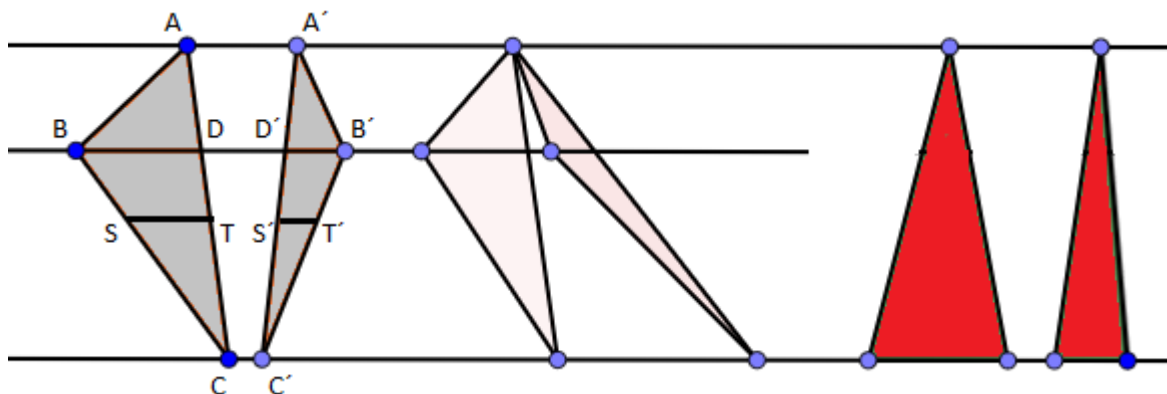


Figura 4

Em 1988, H. Eves [1] publica as duas primeiras demonstrações (umha construtiva e outra de existência) de que é possível situar qualquer par de triângulos de igual área em posição de Cavalieri, resultado que qualifica de surpreendente por considerar que “é difícil de crer que

um longo e estreito triângulo de base umha milha poda ser Cavalieri-congruente, por exemplo, a um triângulo equilátero da mesma área”. E em 1991, P. Halmos [5] publica umha nova demonstraçom de existênciam e insiste no feito de este *assombroso resultado ter pasado desaperebido até o seu descobrimento relativamente recente por Eves*. Comentários que evidênciam que os seus autores nom visualizaram como Cavalieri-congruentes à parilha de triângulos que num trapézio formam as diagonais com cada um dos lados nom paralelos, sobre a qual chamei a atençom ao longo de máis de tres décadas aos meus alunos.

Desenvolve-se aquí a generalizaçom de esse resultado que publiquei primeiro em [3], demonstrando que dous triângulos de distintas áreas podem situar-se em posiçom de Cavalieri se existe umha relaçom de orde inversa entre as longuras de um lado em cada triângulo e as das suas respectivas alturas (que é o caso de qualquer parilha de lados se as áreas som iguais); e que ampliei em [4] determinando analiticamente as posiçom de Cavalieri ao fazer coincidir com a orige dum sistema de coordenadas cartesianas os vértices opostos a esses lados, e girando um dos triângulos com centro no vértice comum. Resultado que permite “visualizar” os triângulos, desde umha prespectiva heurística “cavalieriana”, como integrados por “tiras infinitesimais” paralelas que estam na mesma raçom que as suas áreas.

## 2.1. Condições de existênciam de posiçom de Cavalieri entre triângulos

Dados os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se um lado ou umha altura de cada um som iguais entre si, evidentemente som posiçom de Cavalieri as que resultam, no primeiro caso, de situar os triângulos com esses lados,  $AB = EF$ , em paralelo e os seus vértices opostos em comum; e no segundo, de fazer coincidir as alturas, como se mostra na Figura 5.

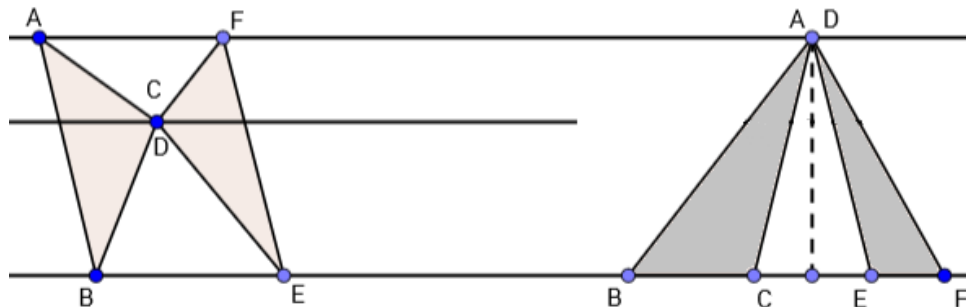


Figura 5

Do que se trata agora é de determinar analiticamente, para dous triângulos com a relaçom entre lados e alturas arriba indicada, *posiçom de Cavalieri* nas que tenham em comum – como nos citados casos particulares – os vértices opostos aos lados fixados.

**Proposiçom 2.1.1.** *Dados os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , tais que a orde das longuras dos seus respectivos lados,  $BC$  e  $EF$ , é a inversa da das suas correspondentes alturas, entom existem posiçom de Cavalieri entre eles com os vértices  $A$  y  $D$  superpostos.*

Demostraçom. Situemos inicialmente os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , como se mostra na Fig. 6, fazendo coincidir os vértices  $A$  e  $D$  com a orige de coordenadas,  $O$  (letra que designará no que segue a ambos); e as alturas que deles partem, com o eixo de abscisas, em sentidos

opostos. Os lados  $BC$  e  $EF$  resultam assi paralelos ao eixo de ordenadas, e suporemos – sem perda de generalidade – para fixar ideias, que os pes das alturas ficam situados entre os seus extremos.

Denotando por  $a$  e  $d$  as longuras de  $BC$  e  $EF$ , e por  $h$  e  $k$  as das suas correspondentes alturas, suponhamos que  $a < d$  e  $h > k$ . Sejam  $a_1, a_2$  e  $d_1, d_2$ , respectivamente, as longuras dos segmentos entre o pe da altura e os extremos de cada lado,  $B, C$  e  $E, F$ . De acordo com esta notaçom as coordenadas dos vértices de  $ABC$  e  $DEF$  som:

$$A(0, 0), B(-h, a_1), C(-h, -a_2), D(0, 0) E(k, -d_2), y F(k, d_1)$$

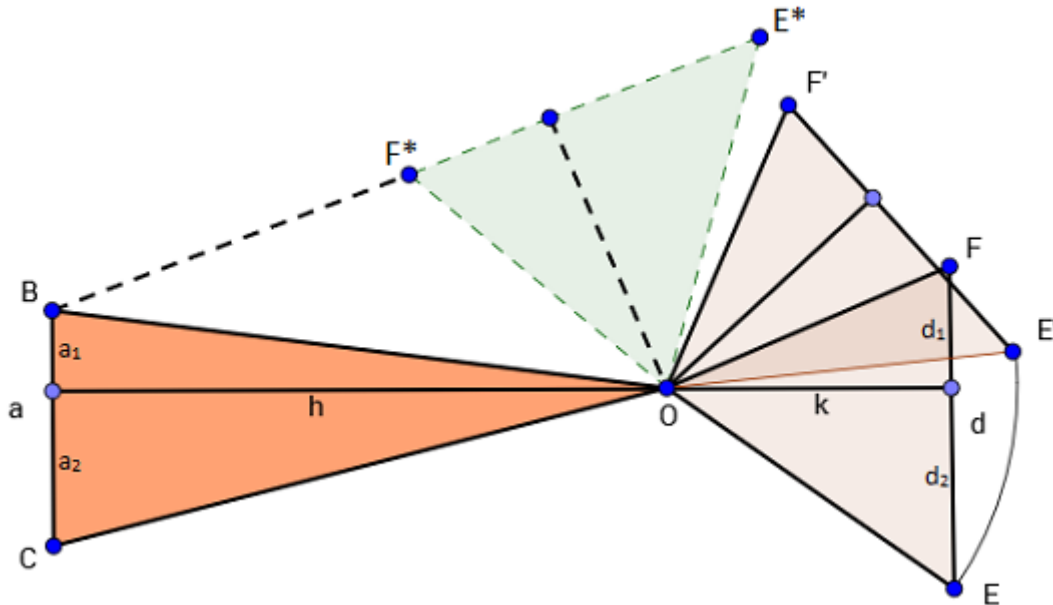


Figura 6

Razoando geometricamente, sem precisom formal, observa-se que nessa posiçom os segmentos  $BF$  e  $CE$  divergem no sentido crescente do eixo de abscisas. Por outro lado, ao ser  $h > k$ , girando em torno da orige, o triângulo  $OEF$  alcançará umha posiçom  $OE^*F^*$  na qual estam alinhados  $B$  e mais os transformados  $F^*$  y  $E^*$  dos vértices  $F, E$  (Figura 6); e consequentemente  $BF^*$  e  $CE^*$  passam a convergir no citado sentido. Completando o giro até alcançar a posiçom inicial, os segmentos voltam divergir, do qual se deduz por continuidade a existência de posições intermédias nas que os segmentos som paralelos, que imos obter analiticamente.

Mediante giro de ângulo  $\alpha$  centrado em  $O$ , os vértices  $E, F$  transformam-se em

$$E'(k \cdot \cos \alpha + d_2 \cdot \sin \alpha, k \cdot \sin \alpha - d_2 \cdot \cos \alpha),$$

$$F'(k \cdot \cos \alpha - d_1 \cdot \sin \alpha, k \cdot \sin \alpha + d_1 \cdot \cos \alpha),$$

e a condiçom de paralelismo entre  $BF'$  y  $CE'$  é

$$\frac{k \cdot \sin \alpha + d_1 \cdot \cos \alpha - a_1}{k \cdot \cos \alpha - d_1 \cdot \sin \alpha + h} = \frac{k \cdot \sin \alpha - d_2 \cdot \cos \alpha + a_2}{k \cdot \cos \alpha + d_2 \cdot \sin \alpha + h}$$

ou, reduzindo termos,

$$(a_1 \cdot d_2 - a_2 \cdot d_1) \cdot \sin \alpha + (a \cdot k - d \cdot h) \cdot \cos \alpha + (a \cdot h - d \cdot k) = 0 \quad (1)$$

(o coeficiente de  $\sin \alpha$  seria  $a_1 \cdot d_2 + a_2 \cdot d_1$  se umha das alturas fosse exterior).

Designando os coeficientes e o termo independente por  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , e resolvendo a respecto do coseno, a equaçom toma a forma

$$(p^2 + q^2) \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot q \cdot r \cdot \cos \alpha + r^2 - p^2 = 0 \quad (2)$$

cujo discriminante  $4 \cdot p^2 \cdot (p^2 + q^2 - r^2)$  é nom negativo se  $q^2 - r^2 \geq 0$ , ou se  $p=0$ . E com efeito,

$$q^2 - r^2 = (a \cdot k - d \cdot h)^2 - (a \cdot h - d \cdot k)^2 = (d^2 - a^2) \cdot (h^2 - k^2),$$

que nom é negativo se  $d \geq a$  e  $h \geq k$ , ou se as duas desigualdades se invertem. Como se supom que ambas som estritas, se  $p \neq 0$  existem duas soluções de (2). Se fosem  $d = a$ , ou  $h = k$ , a equaçom (1) tomaria cada umha das formas

$$(a_1 \cdot d_2 - a_2 \cdot d_1) \cdot \sin \alpha + (a \cdot k - a \cdot h) \cdot (\cos \alpha - 1) = 0 \quad (3)$$

$$(a_1 \cdot d_2 - a_2 \cdot d_1) \cdot \sin \alpha + (a \cdot h - d \cdot h) \cdot (\cos \alpha + 1) = 0 \quad (4)$$

que, respectivamente, se verificam para  $\alpha = 0$  e para  $\alpha = \pi$  (qualquera que seja o valor de  $p$ ), as duas soluções que já se especificaram no início desta secção. E se  $p=0$ , a soluçom única para a equaçom (1) é  $\cos \alpha = (d \cdot k - a \cdot h)/(a \cdot k - d \cdot h)$ .

## 2.2. Determinaçom das posições de Cavalieri entre triângulos de igual área

**Proposiçom 2.2.1.** *Sejam ABC e DEF triângulos de áreas iguais. Fixado ABC, para cada superposiçom dos seus vértices existem duas posições de Cavalieri entre eles, com DEF girado  $\pi$  radians em umha a respeito da outra. Se os triângulos som congruentes, nas superposições de vértices correspondentes a ângulos iguais todas as posições som de Cavalieri.*

Demostraçom. A igualdade das áreas implica a inversom das ordens entre as longuras de qualquer par de lados (um de cada triângulo) e as das respectivas alturas, e também que, ao ser  $a \cdot h = d \cdot k$ , a equaçom (1) se reduz a

$$(a_1 \cdot d_2 - a_2 \cdot d_1) \cdot \sin \alpha + (a \cdot k - d \cdot h) \cdot \cos \alpha = 0 \quad (5)$$

Se o segundo coeficiente se anula,  $a \cdot k = d \cdot h$ , (o que significa que  $d = a$ , e  $k = h$ ), a soluçom de (5) é  $\sin \alpha = 0$ , e por tanto  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$ , os ângulos que fixam as correspondentes posições de Cavalieri, como ficou sinalado no caso de triângulos com distintas áreas.

E de se anular o primeiro,  $a_1 \cdot d_2 = a_2 \cdot d_1$ , obtem-se a soluçom  $\cos \alpha = 0$ , sendo  $\pi/2$ ,  $2\pi/3$  os ângulos que determinam as posições.

Ambos os coeficientes de (5) se anulam se e só se os triângulos som congruentes e o vértice comum corresponde a ângulos iguais, em cujo caso todos os valores de  $\alpha$  a verificam.

No caso geral, no qual  $a_1 \cdot d_2 - a_2 \cdot d_1 \neq 0$  (ou, pola posiçom das alturas, o primeiro coeficiente é  $a_1 \cdot d_2 + a_2 \cdot d_1$ ), e  $\cos \alpha \neq 0$ , a soluçom de (5) é

$$\tan \alpha = \frac{d \cdot h - a \cdot k}{a_1 \cdot d_2 - a_2 \cdot d_1} \quad (\text{ou bem } \tan \alpha = \frac{d \cdot h - a \cdot k}{a_1 \cdot d_2 + a_2 \cdot d_1})$$

que determinam as duas posições de Cavalieri com o vértice comúm  $A = D$ , a respeito do qual – como nos casos particulares – som simétricas (estám giradas  $\pi$  radians) as correspondentes a  $DEF$ , o qual por otra parte é fácil deduzir por métodos de geometria sintética (Figura 7):

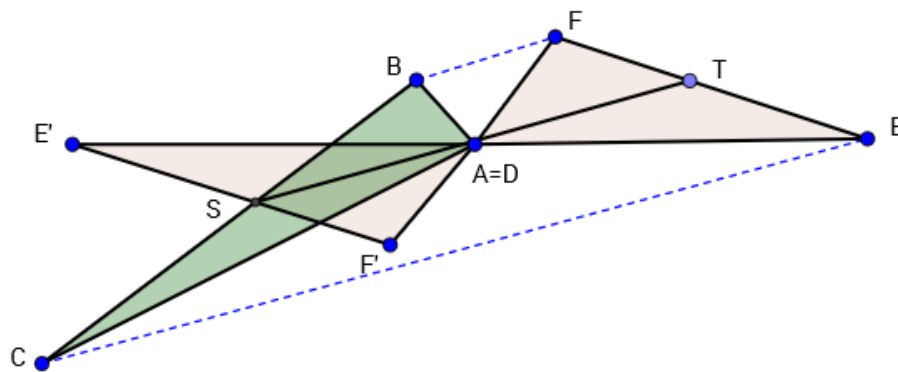


Figura 7

Dados  $ABC$  y  $DEF$  em posiçom de Cavalieri, e mais o simétrico de este a respeito do vértice comum,  $DE'F'$ , se verifica que

$$\frac{BS}{SC} = \frac{FT}{TE} = \frac{F'S}{SE'}$$

é dizer, que os segmentos  $BF'$  e  $E'C$  som paralelos e consequentemente este último triângulo está em posiçom de Cavalieri com o primero.

Escrevendo  $m = -(\tan \alpha)^{-1} = (a_1 \cdot d_2 - a_2 \cdot d_1)/(a \cdot k - d \cdot h)$ , as rectas

$$y = m \cdot x \pm k \cdot (m^2 + 1)^{1/2}$$

som as que contemham ao lado  $EF$  do triângulo  $DEF$  em cada umha das posições de Cavalieri.



## Referências

- [1] Eves, H. (1991), *Two Surprising Theorems on Cavalieri Congruence*. The College Mathematics Journal, Vol. 22/2, págs. 118 - 124. (Reprinted from the 1988 Mathematical Sciences Calendar. Rome Press, Inc.).
- [2] García Suárez, J. A. (2012), *Sobre la congruencia de Cavalieri en triángulos*. Bol. de la Soc. Puig Adam, 91, págs. 56 – 61.
- [3] García Suárez, J. A. (2017), *Determinación de la circunferencia de los 9 puntos mediante relaciones cuadrangulares cíclicas entre ellos*. Bol. de la Soc. Puig Adam, 103 (Abril), págs. 66 – 68.
- [4] García Suárez, J. A. (2017), *Posiciones de Cavalieri entre dos triángulos de distinta o igual área*. Bol. de la Soc. Puig Adam, 104 (Octubre, págs. 85 – 92.
- [5] Halmos, P. (1991), *Problems for mathematicians, young and old*. Mathematical Association of America, Washington, D.C., págs. 202 – 206.