

FIRMA INVITADA**AS MATEMÁTICAS COMO INSTRUMENTO PARA A TOMA DE DECISIONS**

CASAS MÉNDEZ, Balbina
GARCÍA JURADO, Ignacio
Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO

1. INTRODUCCIÓN

Dentro das actividades máis habituais que levan a cabo os seres humanos ó longo da súa vida, ben de forma individual ou ben de forma colectiva, atópase a de tomar decisións. Enténdese por “tomar unha decisión”, seleccionar unha acción dentro dun conxunto de posibles accións. Hai que ter en conta que, nun principio, calquera decisor tratará de elixir aquela acción que favoreza ó máximo os seus intereses. Polo tanto, un primeiro problema xorde porque, en xeral, non podemos saber con precisión cal será a consecuencia, para os nosos intereses, da elección dunha determinada acción.

En moitas ocasións, a toma de decisións para a resolución de problemas reais realízase inspirada unicamente polo sentido común, a experiencia, a intuición, pero ignorando gran parte das interrelacións entre os distintos elementos involucrados no problema. Se queremos levar a cabo unha toma de decisións e, en xeral, un coñecemento da realidade, dunha forma rigorosa, exacta, planificada, que utilice a información de maneira eficaz e que nos permita resolver problemas prácticos, as Matemáticas constitúen unha ferramenta indispensable. Isto é así pola utilización que esta ciencia fai da capacidade de abstracción e razoamento, pola súa precisa linguaxe propia e, en definitiva, polo seu poder para modelar a realidade.

O obxectivo das Matemáticas non é unicamente guiar a toma de decisións, aínda que si é certo que determinadas teorías ou disciplinas teñen como unha das súas metas principais a de servir de instrumento na resolución de problemas de decisión. Naturalmente, estas teorías e disciplinas, cunha

orixe remota no tempo no caso dalgunhas, teñen acadado gran complexidade e desenrolo. Non é o noso obxectivo entrar aquí con profundidade en ningunha delas, pero si intentar explicar con claridade de que tratan, mostrar exemplos ilustrativos das ideas que as alimentan e apuntar certas notas históricas que nos permitan comprender mellor o seu estado actual.

Esas teorías ou disciplinas matemáticas que serven de instrumento á toma de decisións e das que nos vamos a ocupar a partir de agora, son as seguintes:

- Teoría Matemática da Decisión
- Teoría de xogos
- Teoría da Elección Social
- Investigación Operativa
- Estatística

Antes de explicar un pouco estas teorías, debemos aclarar que non son independentes, se non máis ben o contrario, pois o número de conexións entre elas é enorme.

2. A TEORÍA MATEMÁTICA DA DECISIÓN

Pódese considerar como un dos iniciadores desta teoría a Jacob Bernoulli pola súas contribucións efectuadas a través do Cálculo de Probabilidades e recollidas no seu libro *Ars Conjectandi*, a principios do século XVIII.

Un antecedente máis recente encóntrase no traballo do *Statistical Research Group*, en Princeton, en aplicacións industriais da Estatística durante a segunda guerra mundial e que conduciu a Wald a elaborar os denominados contrastes secuenciais para o control de recepción.

A Teoría Matemática da Decisión céntrase basicamente nos problemas de toma de decisións que involucran a un único decisor, o cal pode elixir unha entre un conxunto de posibles accións ou decisións.

A aplicación desta teoría alcanza moitos aspectos da vida cotiá. Supoñamos, por exemplo, un inversor que observa a suba dos tipos de interese e preguntase se invertir ou non en bonos a longo prazo. Sen embargo, a decisión de invertir neste tipo de bonos pode non ser óptima; todo depende da evolución futura dos tipos de interese, evolución que non é coñecida con precisión polo inversor no momento de tomar a decisión.

Outro exemplo: consideremos unha empresa petroleira A, que posúe uns terreos nos que pode haber petróleo. Unha segunda empresa B está interesada na compra deses terreos. Diante desta situación, a empresa A pode

vender os terreos ou pode efectuar a perforación dos mesmos. Ó tomar a decisión, a empresa A enfróntase á incerteza de que os terreos poden ter realmente petróleo ou non.

Os outros tres elementos considerados fundamentais nun problema de decisión, aparte do decisor, son, por un lado, a “natureza” (é dicir, o ambiente ou contexto no que se desenvolve o problema), que pode presentar distintos “estados”, por outro lado, hai que considerar as consecuencias que se derivan de cada par formado por unha acción do decisor e un estado da natureza; naturalmente estas consecuencias son en moitas ocasións de tipo numérico, pero poden ser tamén de tipo cualitativo. Finalmente, débese ter en conta o sistema de “preferencias” que o decisor posúe sobre o conxunto de consecuencias, e a partir das cales o decisor deberá tomar a súa decisión.

Xunto ós elementos mencionados máis atrás, en calquera problema de decisión é importante considerar outros. Respecto da natureza ou ambiente, pode ser de diferentes tipos. Así, pódese falar de ambiente de “certidume” cando coñecemos con toda precisión o estado que vai presentar a natureza. Cando os diferentes estados da natureza están rexidos por unha distribución de probabilidades e esta é coñecida polo decisor, fálase dun ambiente de “risco”. O ambiente denomínase de “incerteza” cando o decisor non coñece nin sequera a distribución de probabilidades que rexe a natureza.

Para poder tratar matematicamente un problema de decisión, ós distintos pares formados por un estado da natureza e unha acción do decisor asígnaselle o valor numérico dunha función que se adoita denominar “función de ganancia”. A decisión tomarase entón tratando de maximizar a dita ganancia.

Un decisor racional, se coñece a función de ganancia, debe evitar as accións “inadmisibles”. Unha acción é inadmisíbel cando podo encontrar outra acción que para calquera estado proporciona unha ganancia maior ou igual e, ademais, para algún estado concreto proporciona unha ganancia estritamente maior. Unha acción que non é inadmisíbel diremos que é “admisíbel”.

Diferentes criterios foron elaborados para a toma de decisións, tendo en conta, entre outros elementos, os diferentes tipos de natureza.

Un deles é o denominado criterio ou principio *maximin*. Supoñamos un ambiente de incerteza; cando emprega o criterio *maximin*, o decisor parte de que, fixada cada unha das súas accións, a natureza vai presentar o estado máis desfavorable para el, no sentido de que lle ocasiona a mínima ganancia posible. Polo tanto, ó elixir unha acción tratará entón de maximizar esas mínimas ganancias; de aí a denominación dada a este criterio. Naturalmente, non en todos os problemas é adecuado partir deste enfoque, certamente pesimista,

no sentido de que o decisor empeza por considerar o estado máis desfavorable para cada acción.

Outro criterio, nese mesmo contexto, é o denominado Criterio de Laplace. Fixada unha acción, como o decisor descoñece completamente a distribución de probabilidades dos estados, supón que esta é uniforme co cal pode calcular a ganancia esperada se elixe esa acción. Finalmente elixirá a acción para a cal esa esperanza é máxima.

O decisor pode tamén tomar as súas accións tendo en conta os resultados dun experimento aleatorio. Podemos pensar que para elixir unha acción realiza un sorteo entre todas as posibles. Asíciase entón a cada par formado por un estado da natureza e unha acción do decisor (a cal depende agora dun experimento) o valor dunha nova función que se denomina “función de pago”. Con este novo enfoque, o decisor buscará maximizar dalgunha forma esta función de pago.

De todo o anterior é fácil deducir que non é un problema trivial o de tratar de tomar decisións de forma racional. O seguinte é un exemplo de situación que pode ser obxecto de análise a través da Teoría da Decisión. Móstranos os problemas cos que pode atoparse un decisor para comportarse de forma racional, incluso nunha situación aparentemente sinxela.

Exemplo 1 (La Paradoxal de Allais)

Supoñamos que a unha persoa lle damos a elixir unha de entre as dúas seguintes opcións:

- a) Opción A: Recibir 100 millóns de pesetas con toda seguridade.
- b) Opción B: Recibir 500 millóns cun 10% de posibilidades, ou recibir 100 millóns cun 89% de posibilidades ou non recibir nada cun 1% de posibilidades.

Ante esta disxuntiva, a maioría das persoas inclinaríanse pola opción A, debido á ganancia segura que proporciona.

Supoñamos que agora lle propoñemos elixir unha de entre dúas novas opcións:

- c) Opción C: Recibir 100 millóns cun 11% de posibilidades ou non recibir nada cun 89% de posibilidades.
- d) Opción D: Recibir 500 millóns cun 10% de posibilidades ou non recibir nada cun 90% de posibilidades.

Ante estas novas opcións, moitas persoas preferirían a opción D á opción C, xa que as posibilidades de obter unha ganancia distinta de cero son

case as mesmas, coa diferenza de que a opción D proporciona unha ganancia sensiblemente maior.

Sen embargo, esta última forma de decidir non parece coherente coa utilizada ó elixir entre as opcións A e B. Para xustificar o que acabamos de dicir, podemos pensar que cada unha das catro opcións anteriores equivalen, respectivamente, a elixir unha papeleta nunha das catro seguintes bolsas (que conteñen 100 papeletas cada unha):

- a) Bolsa A: As 100 papeletas teñen escrito o número 100.
- b) Bolsa B: A papeleta 1 ten escrito o número 0, desde a papeleta 2 ata a 11 teñen o 500 e desde a 12 ata a 100 teñen escrito o 100.
- c) Bolsa C: Desde a papeleta 1 ata a 11 teñen escrito o número 100, e desde a 12 ata a 100 teñen o 0.
- d) Bolsa D: A papeleta 1 ten o número 0, desde a 2 ata a 11 teñen o 500, e desde a 12 ata a 100 teñen escrito o 0.

A distribución das catro bolsas pode verse claramente na táboa 1.

Táboa 1

	1	2-11	12-100
A	100	100	100
B	0	500	100
C	100	100	0
D	0	500	0

Comparando as bolsas A e B, vemos que calquera delas proporciona a mesma ganancia se a papeleta seleccionada é unha entre a 12 e a 100. A bolsa B é a que proporciona unha maior ganancia se a papeleta elixida está entre a 2 e a 11. Finalmente, se a papeleta elixida é a 1, coa opción B non gañamos nada e ganamos 100 si a opción é a A. Repetindo o mesmo razoamento ó comparar as bolsas C e D, ámbalas dúas proporcionan a mesma ganancia cando a papeleta é unha entre a 12 e a 100, D proporciona maior ganancia se a papeleta está entre a 2 e a 11 e se a papeleta é a 1, non gañamos nada se a bolsa é a D.

Chegamos á conclusión de que alguén que razoadamente prefira a opción A á B, entón polas mesmas razóns debería de preferir a C á D.

Esta conclusión que informalmente presentamos aquí pode xustificarse rigorosamente. A Teoría Matemática da Decisión demostra que, baixo certas condicións moi xerais, un decisor racional posúe o que se chama unha “función de utilidade” no sentido de Von Neumann e Morgenstern. Pois ben, calquera decisor que teña unha de tales funcións de utilidade, debe preferir A a B se e soamente se prefire C a D.

3. A TEORÍA DE XOGOS

A Teoría de Xogos é unha disciplina matemática que estudia situacións conflictivas. Unha situación conflictiva (ou “xogo”) é aquela na que interveñen varios axentes (ou “xogadores”) que poden tomar decisións, de maneira que, en función das decisións de todos, prodúcese un resultado; a situación é conflictiva cando non tódolos axentes teñen as mesmas preferencias sobre o conxunto de posibles resultados.

Tradicionalmente, considérase a Teoría de Xogos como unha teoría normativa, no sentido de que prescribe o que cada xogador, ó que se supón completamente racional, debería facer nun xogo, co obxectivo de optimizar as súas ganancias. Non é tanto unha teoría descritiva posto que a suposición de completa racionalidade non se corresponde a miúdo co que ocorre nas situacións reais. Non obstante, na actualidade hai unha corrente “experimental” dentro da Teoría de Xogos que se está empezando a ocupar da faceta descritiva da disciplina.

En 1913, Zermelo dá a coñecer un traballo sobre o xadrez que é considerado como a primeira contribución á Teoría de Xogos. No ano 1928, Janos von Neumann, un matemático estadounidense de orixe húngara coñecido por John von Neumann e que tamén realizou contribucións no terreo da mecánica cuántica e da termodinámica, publica un traballo importante da Teoría de Xogos, no contexto dos denominados xogos bipersonais de suma cero, e que recolle o denominado teorema *minimax*. En 1944, von Neumann xunto co economista Oskar Morgenstern publican un libro xa clásico en esta disciplina, *Theory of Games and Economic Behavior*.

Da importancia actual da Teoría de Xogos, e en particular da súa interacción co estudio do comportamento dos fenómenos económicos, da fe a concesión en 1994 do Premio Nobel de Economía ós prestixiosos teóricos de xogos John Harsanyi, John Nash e Reinhard Selten, ‘for their pioneering analysis of equilibria in the theory of noncooperative games’. Os dous últimos participaron activamente no Congreso Mundial da Sociedade de Teoría de Xogos, celebrado en Bilbao no ano 2000.

Sen embargo, a Teoría de Xogos non soamente ten conexións coa Economía, se non que se utiliza tamén na Ciencia Política para analizar as estruturas de votación, en Filosofía como ferramenta para a análise de normas e institucións sociais ou en Bioloxía como ferramenta para analizar o comportamento das especies.

Tamén polo medio da Teoría de Xogos podemos modelar xogos de estratexia como o xadrez, pero o campo de actuación desta disciplina vai moito máis alá. En canto á súa denominación, Myerson escribe o seguinte no seu libro *Game Theory*: “*The situations that game theorists study are not merely recreational activities, as the term game might unfortunately suggest. Conflict Analysis or Interactive Decision Theory might be more descriptively accurate names for the subject, but the name Game Theory seems to be here to stay*”.

En xeral, a Teoría de Xogos divídese en Teoría de Xogos cooperativos e Teoría de Xogos non cooperativos. O tratamento de cada un destes dous tipos de xogos é moi diferente.

Nos xogos cooperativos suponse que os xogadores dispoñen de mecanismos que lles permiten tomar acordos vinculantes. O interese radica entón no resultado que os xogadores poden obter de forma individual e de forma conxunta, anque non se indique a forma de obter o dito resultado. Concretamente, a cuestión central neste tipo de xogos está na definición de conceptos de solución que indiquen como repartir, entre os xogadores, a ganancia xerada pola cooperación entre todos eles. Unha vez definido un concepto de solución, outra cuestión importante é a de caracterizalo por medio de propiedades, baseadas a miúdo en criterios de xustiza ou estabilidade. As propiedades a miúdo axudan ós xogadores a comparar os distintos conceptos de solución existentes e a elixir o máis axeitado para cada situación de conflito concreta.

Problemas de asignación dos custos dun determinado servizo entre os usuarios do mesmo, a distribución dun recurso escaso entre axentes que realizan demandas sobre el ou a formación de coalicións nun parlamento, entre outros, foron analizados utilizando modelos de teoría de xogos cooperativos.

Nun xogo cooperativo unha “coalición” é un conxunto de xogadores. Para modelar un problema cooperativo, utilízase a denominada “función característica”, que asigna a cada coalición a ganancia que pode obter se os seus membros deciden cooperar.

Nótese que a ganancia dunha coalición de xogadores caracterízase dando un número cando os xogadores poden repartir libremente a ganancia entre eles (esto é posible cando a dita ganancia é un ben divisible, por exemplo diñeiro). Se non pode repartirse libremente, a función característica asigna a

cada coalición o vector de ganancias que os seus membros poden conseguir se cooperan.

Así pois, vemos que hai diferentes clases de xogos cooperativos dependendo de cal sexa o tipo da súa función característica. Incluso nalgúns casos, a función característica non é suficiente para recoller toda a información relevante do problema. Pode acontecer, por exemplo, que entre os distintos xogadores exista algún tipo de afinidade como consecuencia, poñamos por caso, da empresa na que traballan ou da súa nacionalidade; e poden existir tamén incompatibilidades debido a cuestións de tipo político. Estas circunstancias débense ter en conta ó definir a solución final do problema.

A Teoría de Grafos resultou ser unha ferramenta poderosa de apoio á función característica, para modelar por completo os problemas cooperativos máis sofisticados.

Un concepto central en xogos cooperativos é o do “núcleo” dun xogo, debido a Gillies (1953). A definición do núcleo está baseada nun principio de estabilidade das coalicións; intuitivamente o núcleo do xogo está formado por todos aqueles posibles repartos da ganancia que poden obter os xogadores, si se forma a coalición total, que non deixan insatisfeita a ningunha coalición.

Outras moitas solucións definíronse para as distintas clases de xogos cooperativos. Só imos citar a proposta por Shapley. Esta solución (coñecida como valor de Shapley) ten tamén unha interpretación moi intuitiva: a cada xogador asígnalle un promedio do que aporta a todas e cada unha das coalicións das que pode formar parte. O valor de Shapley pódese caracterizar de diversas maneiras, facendo uso de propiedades baseadas no principio de xustiza no reparto das ganancias.

Nos xogos non cooperativos, suponse que non están permitidos os acordos vinculantes entre os xogadores. Á hora de analizar estes xogos a énfase ponse nos aspectos estratéxicos. Neste contexto, a miúdo interprétase a solución dun xogo como un perfil de estratexias dos xogadores, de maneira que cada un deles elixe unha resposta óptima ás estratexias.

As aplicacións dos xogos non cooperativos á Economía son moi abundantes. Por citar algúns exemplos, poderíamos falar de oligopolios, poxas, economías de intercambio, etc.

Existen diferentes procedementos para modelar un problema non cooperativo. Un deles é a denominada “forma estratéxica” que recolle as distintas estratexias dos xogadores e os pagos asociados ás distintas combinacións das mesmas. Outro modelo, máis complexo có anterior, é a denominada “forma extensiva” que describe as posibles accións dos xogadores, incluíndo o azar cando este intervén, en que momento actúa cada xogador, a información

dispoñible en cada punto de actuación e os pagos asociados ás distintas combinacións de accións.

Unha das solucións máis importantes no contexto non cooperativo é a debida ó anteriormente mencionado John Nash: intuitivamente, unha combinación de estratexias dos xogadores constitúe unha solución (tamén denominada, neste contexto, equilibrio) se ningún axente pode mellorar o seu pago desviándose unilateralmente da dita combinación. Así pois, un equilibrio de Nash é unha combinación de estratexias que se “autoimpón”, no sentido de que ningún xogador ten motivos para apartarse dela.

Nun dos seus traballos, de 1950, Nash demostra que todo xogo cun número finito de xogadores, no que cada un deles ten un número finito de estratexias, si os xogadores poden elixir estratexias mixtas (é dicir, loterías sobre os seus conxuntos de estratexias), posúe ó menos un equilibrio.

O seguinte exemplo sérvenos para ilustrar o concepto de equilibrio de Nash e para dar unha idea do tipo de cuestións que se estudian en Teoría de Xogos.

Exemplo 2 (Dilema do Prisioneiro)

Dous delincuentes están sendo sometidos por separado a un rigoroso interrogatorio, de forma que cada un deles soamente ten dúas posibles estratexias: delatar ó seu compañeiro ou permanecer calado e non delatalo. A táboa 2 recolle as distintas combinacións de estratexias e as consecuencias das mesmas (arriba, á esquerda, escribimos os anos de cárcere correspondentes ó primeiro xogador, abaixo, á dereita, os anos de cárcere correspondentes ó segundo).

Táboa 2

		Segundo Xogador	
		D	N
Primeiro Xogador	D	8 0	
	N	10 1	8 10

Vemos que se os dous deciden delatarse mutuamente a cada un correspóndelle unha pena de 8 anos; se ninguén fala, a pena para cada un é de 1 ano e se soamente un decide delatar, este queda libre e o outro delincuente ten unha pena de 10 anos.

Nestas condicións e supondo que o único obxectivo dun xogador é minimizar o tempo que pasa no cárcere, ¿como debería actuar cada un deles? Poñámonos na pel do primeiro delincuente. Faga o que faga o seu contrincante, el pasará menos tempo no cárcere se elixe a estratexia D. O mesmo lle ocorre ó segundo delincuente. Así pois, ambos se delatarían mutuamente e cada un deles pasaría oito anos na prisión. Este é o único equilibrio de Nash do xogo. Obsérvase que existe unha forma de actuar dos dous xogadores que mellora a ámbolos dous (que ninguén deles delate ó contrincante) pero, como ámbolos dous gañan se se desvían unilateralmente dela, nun contexto puramente non cooperativo no que os acordos vinculantes son inviables, ese perfil de estratexias “constructivo” non se levará á práctica.

Evidentemente, se nesta situación os xogadores dispuxesen de mecanismos para tomar acordos vinculantes, ámbolos dous se vincularían a non delatar ó contrario e acabarían pasando un só ano na prisión.

Dito doutra maneira, a cooperación favorece os intereses dos axentes, de forma individual e de forma conxunta.

4. A TEORÍA DA ELECCIÓN SOCIAL

Esta teoría ocúpase da busca de procedementos que permitan a grupos de individuos, pertencentes, por exemplo, a unha determinada organización política ou social, realizar unha determinada elección baseándose nas preferencias de tódolos membros do grupo.

Exemplos de problemas deste tipo poden ser a decisión dun xurado con varios membros acerca da inocencia ou culpabilidade dun detido, a elección do presidente dunha certa corporación ou a decisión dos membros do equipo directivo dunha empresa entre diferentes alternativas de inversión. O tema central do que se ocupa a Teoría da Elección Social é o de elaborar regulamentos de votación.

Os elementos básicos dun problema de elección social son os seguintes: En primeiro lugar, considéanse n axentes ou decisores. Dispoñemos dun conxunto de m alternativas. Cada axente ten unhas preferencias sobre o conxunto de alternativas que lle permiten ordenalas.

Pois ben, unha “regra de elección social” é unha función que agrega as ordenacións das alternativas que proporcionan os axentes nunha única ordenación asumible por esa “sociedade de axentes”.

Tradicionalmente resolvéronse este tipo de problemas utilizándo métodos baseados en costumes, de tipo ético ou social. Dos regulamentos en concreto, utilizáronse para este tipo de problemas: a “regra da maioría” e a “regra dictatorial”. A última non conta con moitos seguidores por razóns de tipo ético.

A regra da maioría ten máis defensores, que argumentan para isto as súas propiedades de neutralidade e anonimato. Sen embargo, tamén presenta inconvenientes. Supoñamos que tres irmáns H1, H2 e H3 pregúntanse como pasar unha tarde de sábado. As alternativas son A1: ir ó cine, A2: ir a patinar, A3: ir de compras. A táboa 3 recolle as distintas ordenacións:

Táboa 3

H1	H2	H3
A1	A2	A3
A2	A3	A1
A3	A1	A2

Se se vota entre A1 e A2, resulta que a maioría prefire A1 a A2. Se se vota entre A2 e A3, a maioría prefire A2 a A3. Se se vota entre A1 e A3 a maioría prefire A3 a A1. Todo isto contradí a propiedade transitiva, que parece un requirimento razoable cando tratamos dunha relación de preferencias.

Esta intransitividade favorece que, segundo sexa a orde de votación, o resultado pode ser distinto. Efectivamente, se primeiro se decide entre A1 e A2, se elimina A2, e si agora se decide entre A1 e A3, se elimina A1 e A3 é a opción elixida. En cambio se se empeza por votar entre A2 e A3, queda A2 e se elimina A3. Se finalmente se elixe entre A2 e A1 a opción A1 queda como preferida entre as tres.

Vemos polo tanto que os métodos tradicionais neste tipo de problemas son susceptibles de crítica e que ten sentido a busca de bos regulamentos de elección social.

Ó comezar os estudos neste campo, os resultados foron bastante desalentadores, xa que Arrow probou o seu coñecido “teorema de imposibilidade”. Este establecía que se se impoñen unhas poucas condicións, totalmente sinxelas e naturais, os únicos regulamentos que as cumprían eran os dictatoriais. Non obstante, o mesmo Arrow viu que se se restrinxía o dominio sobre o que se definían os regulamentos de elección social, podíamos encontrar algún distinto dos dictatoriais que cumprise as condicións.

Desde os traballos de Arrow, a Teoría da Elección Social experimentou un gran desenvolvemento. Outros resultados a destacar desde o primeiro momento, son os de Coombs e Black nos que se estudian condicións baixo as cales a regra da maioría non contradí a propiedade transitiva e verifica case a totalidade das condicións suxeridas por Arrow no seu teorema de imposibilidade. Actualmente, a Teoría da Elección Social é unha liña de investigación con gran forza.

O seguinte exemplo mostra como un determinado deseño dunha regra de elección pode conducir a decisións pouco razoables.

Exemplo 3 (O Festival da Canción)

Supoñamos un festival no que interveñen catro cancións: A, B, C e D e onde sete compoñentes dun xurado deben seleccionar unha canción gañadora.

O procedemento de selección consiste no seguinte. En primeiro lugar, cada membro do xurado ordena as catro cancións en función das súas preferencias. Imaxinemos que o resultado das ordenacións é o que recolle a táboa 4:

Táboa 4

1	2	3	4	5	6	7
A	B	C	A	B	C	A
B	C	D	B	C	D	B
C	D	A	C	D	A	C
D	A	B	D	A	B	D

Nunha segunda fase, cada membro do xurado asígnalle catro puntos á súa canción preferida, tres á segunda, dous puntos á terceira canción e un punto á última. A puntuación final de cada canción obtense sumando os puntos que cada membro do xurado asigna a esa canción.

Na táboa 5, vemos cal é a puntuación final de cada canción. Claramente a canción C obtén o primeiro lugar, a B o segundo lugar, A é a terceira e D a cuarta.

Táboa 5

	1	2	3	4	5	6	7	
A	4	1	2	4	1	2	4	18
B	3	4	1	3	4	1	3	19
C	2	3	4	2	3	4	2	20
D	1	2	3	1	2	3	1	13

Supoñamos agora que A denuncia o incumprimento dalgunha norma do festival por parte da canción D. O feito parece en principio irrelevante posto que A ocupa o terceiro lugar e, sobre todo, D ocupa o último.

Pero vexamos que ocorre se D resulta descualificada. Ó quedar tres cancións, cada membro do xurado debe asignar tres puntos á súa canción preferida e dous e un puntos, respectivamente, ás dúas seguintes cancións. Como se pode ver na táboa 6, o resultado do festival modifícase case por completo, xa que A se converte en gañadora, B segue ocupando o segundo lugar e C, que era a gañadora en presenza de D, pasa agora a ocupar o último lugar.

Táboa 6

	1	2	3	4	5	6	7	
A	3	1	2	3	1	2	3	15
B	2	3	1	2	3	1	2	14
C	1	2	3	1	2	3	1	13

O problema aparece porque as preferencias dos xuíces tiñan unicamente un carácter ordinal e asignámoslles valores numéricos cos que despois operamos matematicamente.

5. A INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Segundo a *Operational Research Society* de Inglaterra, “a Investigación Operativa é a aplicación do método científico ós problemas complexos que aparecen na dirección e xestión de grandes sistemas de homes, máquinas, materiais e inversións económicas na Industria, Medicina, Socioloxía, Administración e Defensa entre outros campos. A súa característica fundamental consiste en construír un modelo matemático do sistema incorporando frecuentemente azar e risco, a partir do cal podan predicirse e/ou compararse os resultados de diferentes decisións políticas, estratexias ou controles alternativos. O obxectivo é axudar ós dirixentes a determinar de forma científica as súas “actuacións”.

Por outro lado, a *Operational Research Society* de América afirma que “a Investigación Operativa ten por obxectivo decidir mediante métodos científicos, sobre o deseño que optimice o funcionamento dos sistemas home-máquina, xeralmente baixo condicións que implican a utilización de recursos escasos”.

Así pois, á vista das definicións anteriores, parece claro o obxectivo fundamental da disciplina: apoiar o proceso de toma de decisións en diferentes problemas da vida real, por medio da construción dos modelos matemáticos axeitados.

Historicamente, adoita citarse como unha das primeiras aplicacións desta disciplina matemática á misión que o rei de Siracusa, chamado Herón, encargou a Arquímedes no século III antes de Cristo. O problema que Herón encarga a Arquímedes foi o de encontrar o modo óptimo de empregar as armas dispoñibles para defender ó seu pobo dos ataques realizados polos barcos romanos.

Outro precursor atopámolo en Monge, quen en 1776 dedicouse a estudar a forma máis económica de organizar traballos de desmonte en problemas relacionados coas Obras Públicas. Máis adiante, Taylor en 1885 analizou o problema de mover cunha pala a maior cantidade de material co menor esforzo posible.

Non obstante, o termo Investigación Operativa non empeza a utilizarse ata a Segunda Guerra Mundial e serve nese momento para denominar ó conxunto de técnicas matemáticas que se utilizan para tomar decisións de tipo militar. De feito o término *Operation* refírese, daquela, ás operacións militares. O primeiro equipo de Investigación Operativa nace no seo do Estado Maior Inglés, debido á dificultade que nese momento entrañaban as decisións militares, o cal obrigou ós estratexas militares a buscar alternativas para os

procedementos clásicos que ata entón viñan sendo utilizados para a toma de decisións.

O director deste primeiro equipo foi Blackett, quen posteriormente se convertería en Premio Nobel de Física. Foron moitos os problemas que houberon de resolver naquel momento os contendentes. Entre eles, un era o que se presentaba ás forzas aliadas: encontrar o tamaño óptimo dos convois marítimos, co obxectivo de minimizar as perdas que os submarinos alemáns podían causar. Había, basicamente, dúas opcións, ou ben utilizar convois de gran tamaño e cunha férrea protección, ou ben convois máis pequenos e cunha menor protección. Tras a análise matemática do problema, a opción elixida foi a primeira.

Despois da guerra, moitos dos investigadores que participaran no estudo dos problemas militares, incorporáronse ás Universidades ou ó sector público. Axiña viron que os modelos matemáticos que aplicaran a problemas de estratexia militar podían ser aplicados a outros contextos.

Outro momento de gran importancia no desenrolo da Investigación Operativa foi cando en 1948 se funda a *RAND corporation*, financiada en principio pola Fundación Ford e que intercambia os seus avances científicos con distintas Universidades e Empresas. A partir dos anos cincuenta, propiciado polo desenrolo da Informática, tivo lugar o gran crecemento da Investigación Operativa.

En 1962 fúndase en España a Sociedade Española de Investigación Operativa, actualmente denominada Sociedade Española de Estatística e Investigación Operativa e que publica dúas revistas de relevancia internacional: TOP e TEST, acrónimos de Trabajos de Investigación Operativa e Trabajos de Estatística respectivamente.

Actualmente existe unha enorme cantidade de modelos de Investigación Operativa. Citaremos soamente algúns dos máis representativos.

- Teoría de colas

Adoita considerarse ó inxeñeiro danés Erlang como o precursor desta teoría polos seus experimentos realizados na primeira década do século XX relacionados coas variacións da demanda de instalacións telefónicas.

Cando un cliente chega a un sistema para demandar un servizo e o dito sistema non é suficientemente rápido como para terminar de atender a o dito cliente antes de que chegue o seguinte, naturalmente este último terá que esperar. É importante entón planificar o sistema de servizos compaxinando a inversión necesaria para aumentar a rapidez, co beneficio obtido por unha

menor espera, a fin de minimizar os custos. Este tipo de modelos denomínanse tamén de liñas de espera.

- Xestión de inventarios

En ocasións, as empresas non producen nun momento dado a cantidade suficiente de bens e/ou servizos para satisfacer a demanda. É conveniente, nestas circunstancias, tomar decisións relativas, por exemplo, á produción ou ó almacenamento de bens co obxectivo de minimizar os custos.

O “inventario” é a cantidade de artigos almacenados en espera de ser utilizados. O financiamento e conservación dos inventarios representa un gasto importante ó que teñen que enfrontarse moitas organizacións.

Existen multitude de modelos determinísticos e estocásticos para estudar este tipo de problemas.

- Localización

No 1909 aparece unha publicación de Weber na que se introduce este tipo de modelos. O obxectivo dos mesmos é resolver o problema de determinar a ubicación dos puntos que ofrecen algún tipo de servizos, co fin de minimizar os custos ou ben para garantir a eficiencia do sistema.

Este é un problema co que calquera empresa pública ou privada se enfronta nalgún momento da súa actividade profesional. A ubicación dun servizo de ambulancias, dun hospital ou dunha escola que debe servir a varios núcleos de poboación, co obxectivo de minimizar o tempo de desprazamento ós diferentes centros ou á asentamento de plantas de residuos sólidos urbanos son algúns exemplos de problemas que se poden tratar con este tipo de modelos.

- Planificación de proxectos

O obxectivo da planificación de proxectos é o de programar e controlar o desenvolvemento de proxectos que constan de diferentes tarefas que á súa vez deban ser executadas por diferentes persoas, como departamentos ou empresas. É fundamental rematar o proxecto a tempo e un factor que dificulta a planificación é o feito de que o inicio dalgunhas actividades depende da finalización doutras.

Algunhas cuestións que deben resolverse son, por exemplo, cal é o tempo total que se require para rematar o proxecto, así como o momento de inicio e finalización das distintas actividades. Hai que sinalar a existencia dalgunhas actividades, que adoitan denominarse «críticas» posto que, no caso de non rematar dentro da data programada, provocarán un atraso na finalización do

proxecto. En canto ás actividades non críticas, disporán dunha «folgura» de tempo que é importante coñecer.

Para resolver este tipo de problemas utilízanse sobre todo dous algoritmos que son coñecidos como PERT, *Program Evaluation and Review Technique* e CPM, *Critical Path Method*, respectivamente.

- Métodos de Programación Matemática

Quesnay no 1759 xa utilizou modelos primitivos do que hoxe en día coñecemos como Programación Matemática e que máis tarde foron empregados por Walras no 1874.

Supoñamos unha empresa que ten almacéns dispersos en diferentes lugares dun país. Ademais considerando as demandas que se fan dos seus produtos un conxunto de clientes, a empresa desexa saber como organizar a distribución dos seus produtos co obxectivo de minimizar os custos de transporte dende os almacéns ata os puntos de demanda. Débese ter en conta que a cantidade de produtos en cada almacén é limitada.

O anterior é un exemplo típico nos que se poden aplica-los métodos de Programación Matemática. En realidade, constitúe unha clase particular de problema denominado «problema do transporte».

Outro problema importante estudado pola Programación é o da «asignación» de tarefas a máquinas, de persoal de vendas a territorios, o de traballadores a tarefas, co obxectivo de minimizar, por exemplo, custos e tempos.

En xeral é un problema de Programación Matemática, desexamos encontrar os máximos (ou mínimos) dunha función de varias variables (a que se denomina función obxectivo) dentro dun conxunto factible. Dito conxunto factible representa as restriccións que se deben cumprir e que limitan dalgunha forma a consecución do obxectivo. Cada un deses óptimos da función obxectivo é unha solución do problema.

Un estudio que adoita acompañar á solución dun Problema de Programación é a «análise de sensibilidade» isto é, analizar como se modifica a súa solución cando se produce algún cambio na función de obxectivo ou nas restriccións.

Especialmente importantes son os problemas de programación lineal, nas que tanto a función obxectivo a optimizar como o conxunto de restriccións son do tipo lineal.

Dende o punto de vista puramente matemático é interesante ver como determinados problemas de programación, por exemplo os de programación lineal con dúas variables se poden resolver completamente de modo gráfico.

Noutros casos sóense aplicar métodos alxebristas. Incluímos para a súa resolución. Para o caso da programación lineal o método máis utilizado é o denominado método do *simplex*.

Incluimos tamén neste apartado a denominada «programación dinámica». Este é un método de resolución que permite descompoñer en problemas máis sinxelos un problema matemático de gran magnitude, de forma que obtida a solución para cada un dos problemas máis pequenos, poderemos obter a solución do problema grande.

- Análise de Redes

Denomínase rede a un diagrama constituído por nodos e arcos (grafo) conxuntamente con algunhas restriccións cara a circulación dun certo fluxo a través dun grafo. As redes utilízanse na Investigación Operativa para optimizar problemas de circulación de fluxo a través dun grafo. Dous dos problemas máis importantes facendo uso das redes son os denominados «do camiño máis curto» e «do fluxo máximo». Para resolvelos foron construídos algoritmos específicos.

Vexamos un exemplo do problema do camiño máis curto. Consideremos unha rede, e con ela, tomemos un nodo que representa a oficina central dunha empresa constructora. O resto dos nodos son de puntos onde a empresa está realizando traballos. Os arcos representan as estruturas de estradas. Ó cabo do día realízanse diferentes viaxes desde a oficina ata os restantes puntos para transportar equipos, persoal e material. Trátase de determinar as rutas que minimizan o camiño total co obxectivo final de minimizar os custos derivados do transporte. Outro exemplo interesante sería o da determinación das rutas que deben seguir as ambulancias que deben atender a unha ampla zona xeográfica.

En canto ó problema do fluxo máximo considera redes cun nodo de entrada ou «fonte» e un nodo de saída ou «Sumidoiro». A cuestión radica en averiguar a cantidade máxima de fluxo (vehículos, auga, mensaxes, etc.) que poden entrar e saír do sistema de rede nun periodo de tempo determinado e de cómo se vai distribuír ese fluxo na rede. Hai que ter en conta que a cantidade de fluxo que pode circular por cada arco (que pode representar unha estrada ou unha tubeira) está limitada pola capacidade do mesmo.

Para pechar este apartado relativo á Investigación Operativa queremos facer fincapé que, aínda que é ben certo que esta teoría require unha importante capacidade de modelación, así como o emprego da ferramenta matemática axeitadas, sen embargo, non debemos de profundizar no coñecemento do ser humano para saber o que realmente quere o usuario. Queremos ilustrar

esta afirmación co seguinte exemplo. O outro exemplo desta sección enfatiza a importancia dunha modulación correcta.

Exemplo 4 (O Problema do Ascensor)

Nun edificio grande con moitas oficinas, os usuarios do ascensor presentaron reiteradas queixas pola lentitude do servizo que proporcionaba dito ascensor.

Os responsables técnicos estudaron o problema e trataron de solucionalo a través dun modelo matemático dos denominados de liñas de espera, e que tiña como obxectivo acelerar o servizo do ascensor. Pero, o modelo non conseguiu calar as queixas dos inquilinos.

Tras un novo estudo da situación chegouse á conclusión de que as queixas dos inquilinos parecían máis ben un caso de tedio en un intento adicional por resolver-lo problema colocáronse espellos de corpo enteiro na entrada do ascensor. Desde ese momento as queixas desapareceron; os usuarios do ascensor ocupaban o tempo de espera contemplándose a si mesmos, e tamén ós demais nos espellos instalados.

Esta anécdota subliña a necesidade de enmarcar calquera problema de investigación operativa, en xeral, dentro dun contexto máis amplo de toma de decisións, na que algúns elementos tal vez non se poidan representar na súa totalidade a través de modelos matemáticos.

Exemplo 5 (O problema dos Bombardeiros B17)

Outro dos moitos problemas cos que se encontraron os estratexas militares na Segunda Guerra Mundial era o do Corpo Aéreo da Armada Norteamericana polas enormes baixas que se producían nos bombardeos que realizaban sobre Alemana os avións B-17.

O obxectivo a acadar era o de reducir significativamente aquelas baixas. Polo que se analizaron exhaustivamente os Bombardeiros B-17 para detectar a localización dos furados que lles producían as balas e o fogo antiaéreo dos alemáns nas misións de bombardeo.

Unha maqueta de F-17 foi marcada con puntos onde se encontraron os furados e parecía claro que había unhas zonas moito máis vulnerables a sufrir danos na batalla. A idea era reforza-los avións aínda que naturalmente era moi importante seleccionar as zonas nas que engadir o reforzo na fuselaxe porque era moi limitado o incremento de peso que se podía incrementar ó avión.

Despois de toda esta análise, o militar a cargo do estudo convocou unha reunión de expertos en estratexia militar para discuti-lo plano de que zonas

máis castigadas debían ser reforzadas cun número maior de capas de fuselaxe. Moitos dos asistentes á reunión xa amosaran entusiasmo ante o magnífico plano e cando parecía que todo estaba a punto de concluír, un militar de alta gradación, que non interviñera ata entón, pediu a palabra. Con certa inseguridade preguntou se non sería máis conveniente comezar reforzando a fuselaxe das zonas do avión nas que se toparon menos furados e menos danos en xeral, antes das zonas máis danadas, xa que verdadeiramente os avións que se analizaron foron os que conseguiron regresar das misións de bombardeo.

Esta segunda anécdota pon de manifesto que a construción dun modelo matemático que inclúa toda a información relevante pode ser tarefa difícil, e dende logo, nalgunhas ocasións, o guiarnos polo que parece máis evidente pode ser unha fonte de erros.

6. A ESTATÍSTICA

A Estatística é unha disciplina que utilizando como ferramenta o Cálculo de Probabilidades, estudia as leis do comportamento de determinados fenómenos aleatorios. Aínda que a consideración da Estatística como disciplina autónoma é relativamente recente, os albores da mesma poden ser situados nos comezos da propia civilización. Deste xeito se expresaba C. Gini no 1935 cando afirmaba : *“non cabe formarse unha imaxe das máis antergas sociedades humanas, sen pensar na necesidade que certamente sentiron de efectuar a enumeración dos elementos de que se compoñían: familias, individuos, homes para a guerra, etc”*.

Entre as primeiras referencias escritas podemos citar os censos efectuados polos israelitas. O primeiro deles, parece ser o efectuado por Moisés no deserto e que se cita no Pentateuco, no libro dos números.

En Roma, as recompilacións estatísticas foron moi importantes e non tiñan por obxectivo único o reconto dos cidadáns, senón tamén a cantidade de bens. Foi incluso creada a figura do censor. Entre os censos romanos, un dos máis relevantes foi o ordenado polo emperador Augusto no ano 577 da fundación de Roma, pola súa relación co cristianismo.

Coa caída do Imperio de Occidente as incipientes actividades estatísticas, así coma a cultura en xeral, entran en crise e non rexurdirán ata o Século XIV coa auxe das repúblicas italianas. Non obstante, en toda esta época as técnicas estatísticas se reducían a meras ferramentas de reconto constituíndo a fase máis elemental do que hoxe solemos denominar Estatística Descritiva.

A partir do Século XVII e sobre todo durante o XVIII, a estatística empeza a consolidarse como disciplina de entidade propia. De todo este período cita-

remos dous feitos. Por unha parte a súa implantación definitiva como asignatura universitaria no S. XVIII gracias ó esforzo do alemán Achenwall. Por outra banda en Inglaterra comezou a utilizarse a estatística, non só como mera técnica de recuento, senón tamén para tentar de obter leis sobre os fenómenos políticos e sociais. Desta época é o traballo que Graunt presentou na Royal Society of London sobre a mortalidade na cidade de Londres.

Durante o S. XIX a Estatística non fai senón desenvolverse. En Francia traballa Cournot, considerado un dos pioneiros dos actuais economistas estatísticos. Tamén neste século se produce a aplicación da estatística, xunto coa Matemática Financeira, ós Seguros. A finais do S. XIX, outra disciplina que comezara a a estudiarse dende comezos do S. XVII, o Cálculo de Probabilidades, comeza a interrelacionarse coa estatística dando lugar ó que hoxe coñecemos como Estatística Matemática. Deste século tamén é a introducción da Distribución Normal, debida a Gauss, como modelo dos erros de medida e o nacemento dos métodos para medi-las relacións entre variables (regresión e correlación) introducidos por Galton e Pearson.

Ó longo dos séculos XIX e XX, exténdense as aplicacións das técnicas estatísticas de xeito que, na actualidade, dentro da Estatística distinguimos numerosos campos, dalgúns dos cales nos ocuparemos brevemente a continuación.

- Estatística Descritiva / Análise de Datos

O obxectivo desta parte da estatística é resumi-la información contida nun conxunto de datos, da forma máis sinxela e clara. Trataremos de reduci-la información ó máximo posible, pero evitando que unha redución excesiva nos leve a ignorar características importantes.

Algunhas das técnicas utilizadas na Análise de Datos consisten en elaborar coeficientes numéricos que resuman a información. Noutros casos úsanse procedementos gráficos.

Obviamente non existe un método único para analiza-los datos, senón que o método depende do tipo concreto de datos, así coma do problema particular que queiramos resolver. Os datos poden se-lo resultado de medir unha única característica sobre un conxunto de individuos, ou o resultado de medir máis dunha. A característica ou características poden ser cualitativas ou cuantitativas.

Os individuos considerados poden formar toda a información que nos interesa analizar ou construír unicamente un subconxunto ou mostra desta poboación. De todas formas cando falamos de Estatística Descritiva supoñemos que os datos cos que traballamos son os relativos a toda a poboación.

Os datos poden tomarse nun tempo ou espacio xeográfico determinado ou en distintos tempos e/ou espazos xeográficos. Neste último caso, a determinación de indicadores sole ser de grande utilidade.

Podemos estar interesados en describir o comportamento das características analizadas de forma independente ou o obxectivo do estudio pode ser descubrir algún tipo de asociación ou dependencia entre as características. No caso da dependencia podemos construír funcións que expresen a relación que existe entre esas características. Neste último caso, as funcións pódennos permitir tamén efectuar previsións para unha das características coñecido o valor das restantes.

Na fase final dunha Análise de Datos é conveniente realizar sempre o que se denomina análise exploratorio dos mesmos, o que nos permitirá detectar por un lado os erros nos datos e tamén valores anómalos dos mesmos, que debemos ter en conta posto que poden distorsionar os nosos resultados.

Nesta parte da estatística, coma en case tódalas demais, desempeña un papel fundamental a informática e os diferentes programas estatísticos existentes na actualidade.

- Inferencia Estatística

A Inferencia Estatística ocúpase fundamentalmente dos problemas nos que se desexan extraer conclusións dunha poboación a partir da análise dunha mostra da mesma.

Son moitos os problemas que trata de resolver a Inferencia Estatística e practicamente todos están conectados en maior ou menor medida co problema da toma de decisións. O problema pode ser decidir a cerca da proporción de individuos que verifican unha característica, a medida dunha variable de interese ou a forma da función de distribución dunha variable. En ocasións interésanos saber se dúas variables son ou non independentes ou dar unha medida do grao de relación que existe entre elas.

Actualmente, o desenvolvemento da Inferencia é extraordinario, pero imos facer un certo fincapé nun dos problemas que resolve: o dos contraste de hipóteses. As aplicacións desta técnica danse en tódalas ciencias. Pensemos, por exemplo, nun médico que ten que decidir se certo hábito alimentario é o causante dunha enfermidade, un físico que desexa decidir se a vida media de certo tipo de átomos é x ou un biólogo que desexa decidir se hai relación entre a altura e a supervivencia dun certo tipo de plantas.

O esquema neste tipo de problemas parte dunha hipótese que desexamos comprobar sobre unha certa poboación a partir da análise dunha mostra. En xeral, a idea será medi-la discrepancia entre o que afirma a hipótese e o que

observamos na mostra. A medida utilizada terá unha distribución coñecida no caso de que a hipótese sexa realmente certa, de maneira que se o valor observado da medida de discrepancia é inveteradamente grande, podemos ter dúbidas da veracidade da hipótese.

- Mostreo

En moitas ocasións desexamos extraer conclusións a cerca dunha poboación, pero observar a tódolos seus individuos pode resultar costoso e lento. Debemos limitarnos entón a observar un subconxunto da poboación, é dicir, unha mostra da mesma. Xorden entón diferentes cuestións que debemos resolver. A primeira é determinar o seu tamaño. A segunda é, coñecido o tamaño da mostra, elixir ós individuos que formarán parte da mesma. A terceira cuestión será como obter información da mostra e por último como utiliza-la información obtida para extraer conclusións sobre a poboación.

De todas estas cuestións ocúpase a Mostraxe. Debemos ter en conta ó estudar unha poboación a partires dunha mostra, que as afirmacións que fagamos sobre a poboación, non poderán ser totalmente precisas, senón que irán sempre acompañadas dun «erro». Usualmente, nin sequera imos poder precisar o erro que imos cometer ó facer as nosas afirmacións, senón que ese erro irá acompañado dun certo grao de incertidume, medido en termos de probabilidade, que adoitamos denominar «nivel de confianza».

Unha vez prantexado o que quero estudar sobre a poboación, fixado o erro que estamos dispostos a admitir e o seu nivel de confianza, é posible determinar o tamaño da mostra necesaria.

Unha vez determinado o tamaño da mostra chega o momento de seleccionar ós individuos que compoñen a mostra, para o cal dispoñemos de diferentes procedementos. Dependendo do método de mostraxe elixida, así será a forma de utilizar a información mostral e disto dependerá tamén a fiabilidade dos resultados obtidos para a poboación.

- Deseño de Experimentos

Sóse dicir que certos problemas en Agronomía conduciron a Fisher a crear a teoría de deseños experimentais. De xeito que a terminoloxía actual que se emprega no Deseño de Experimentos conserva reminiscencias da súa orixe neste ámbito da Agronomía.

Moitos dos experimentos que se levan a cabo en Bioloxía, Medicina, Física ou Enxeñería teñen como principal obxectivo averiguar-lo efecto que sobre unha determinada variable, que se soe denominar «variable resposta» teñen as variacións doutras variables, ás que soemos denominar «factores».

Por exemplo, pode interesarnos cómo a utilización de distintos tipos de abono inflúe na produción dun certo cultivo.

Cando determinados factores interveñen no experimento a diferentes niveis falamos da existencia de «tratamentos». Un tratamento pode ser, entón, un determinado tipo de abono. Se considero catro tipos de abonos terei catro tratamentos diferentes. Unha «parcela» ou unidade experimental é parte dun certo material, por exemplo unha porción de terreo, ó que se lle aplica certo tratamento. Cando temos un conxunto de parcelas con características semellantes falaremos de «bloques»; por exemplo pode que teñamos dous bloques, un constituído por parcelas máis secas e soleadas e outro por parcelas máis húmidas e sombrías.

Por tanto, cando realizamos un experimento, tendo en conta a terminoloxía anterior, estaremos comparando os resultados de diferentes tratamentos. Para isto será necesario saber qué tratamentos imos utilizar, qué parcelas recibirán os tratamentos e que regra imos seguir para reparti-los tratamentos entre as parcelas.

Haberá que ter en conta que neste contexto hai dous elementos que poden influír nos resultados, ademais dos tratamentos, e que poden ser fonte de erro. Estes dous elementos son, por unha banda, a diferenza entre a natureza das distintas parcelas, e pola outra banda, a realización do proceso técnico.

É importante deseñar de forma axeitada o experimento para intentar reducir ó máximo os erros experimentais. Para conseguilo, é frecuente recorrer á repetición dun mesmo tratamento para así tentar de eliminar o efecto das variables que poidan estar fóra de control e aumentar con isto a precisión dos resultados. Por outra parte é importante eliminar as diferenzas entre parcelas. Por último, é importante afinar a técnica do experimento para que esta sexa o máis uniforme posible nas distintas aplicacións da mesma.

- Series Temporais

Un tipo de datos especial é aquel que xorde como consecuencia de medir unha certa característica ó longo do tempo, por exemplo, as vendas diarias ou as ganancias trimestrais. Para estudar este tipo de datos, xa dende un punto de vista descritivo ou dende un punto des vista inferencial se utiliza un tipo de técnicas moi concretas.

No denominado enfoque clásico, para o estudo de series temporais sólese partir da descomposición da característica obxecto de estudo en catro compoñentes.

A primeira delas é unha nova característica que se denomina «tendencia da serie» e que é unha medida da evolución a longo prazo da serie. A segunda

compoñente sólese denominar «estacionalidade» e reflicte oscilacións de tipo curto da característica, por exemplo, as vendas dun determinado produto poden sufrir incrementos nun determinado mes do ano e este feito pode repetirse en maior ou menor medida tódolos anos. A terceira compoñente denomínase «compoñente cíclica» e reflicte oscilacións que non teñen que ver coa estacionalidade. As oscilacións cíclicas aparecen sobre todo cando se observan períodos longos de tempo e non son necesariamente regulares. Unha cuarta compoñente é a denominada «compoñente irregular» que reconece factores que inflúen na característica pero que son dificilmente predecibles a partires da experiencia anterior.

No enfoque clásico soen tratarse por separado cada unha das catro compoñentes anteriores e que finalmente se concatenan, aditivamente por exemplo, para construí-lo modelo final que nos permitirá explicar o comportamento da característica así como realizar previsións sobre a mesma.

Existen por suposto moitos outros métodos para o tratamento das series. Todos eles, así como o método clásico do que antes falamos, teñen moitas aplicacións, sobre todo en economía.

- Modelos de Regresión

En tódalas Ciencias, sexa a Física, Química, Bioloxía, Meteoroloxía, Socioloxía, Economía, etc. podemos ver que se presentan constantemente relacións entre as variables. Un problema importante xorde se desexamos encontrar «leis» ou modelos que relacionen variables que toman valores facilmente observables cos que toman outras variables máis difíciles de observar.

Hai casos nos que a dependencia entre dúas variables é exactamente de tipo funcional, por exemplo a relación entre o espacio percorrido por un móbil a velocidade constante e o tempo empregado no percorrido. Pero noutros casos, como o peso ou a talla dun individuo, pode haber unha relación máis feble que a de tipo funcional. Os modelos de regresión pretenden construír funcións que permitan relacionar do modo máis axeitado posible varias variables entre as que, habendo algunha dependencia, esta non é funcional. Este é un dos terreos máis fértiles e con máis aplicacións da estatística.

- Análise Multivariante

A Análise Multivariante xorde ante a necesidade prantexada, fundamentalmente nas Ciencia Sociais, Biolóxicas e Médicas, de analizar moitas variables conxuntamente. En concreto, un problema de discriminación Antropolóxica conduce a Fisher a inventar o denominado análise discriminante. O denominado análise factorial xorde ligado a problemas de Psicoloxía.

Cando o economista, ou o biólogo ou o sociólogo desexa analizar un problema determinado nunha poboación intenta nun principio recoller información para esa poboación sobre un número grande de variables. O resultado é que se encontra con grande cantidade de información, difícil de manexar e interpretar e pode ocorrer que parte desta información sexa redundante por existir relacións de interdependencia entre algunhas destas variables. O obxectivo das técnicas multivariantes é sintetiza-la información contida en grandes volumes de datos.

En ocasións, a síntese da información vai encamiñada á clasificación de individuos a partir dos valores que toman certas variables. Supoñamos, por exemplo, que certas larvas de crustáceos teñen diferentes estadios de crecemento. Pódenos interesar o saber qué variables (lonxitude, ancho,..) son as máis útiles para explicar a pertenza dun individuo dado a un estadio ou incluso para coñecer o estadio dun individuo.

Un problema interesante neste contexto foi durante moitos anos o da detección da hemofilia nas mulleres. Esta enfermidade non manifesta os seus síntomas nas mulleres, aínda que estas poidan transmitila ós seus descendentes. Por medio dun estudio cunha mostra de portadoras e non-portadoras da enfermidade. Gomperts e outros investigadores (1976) obtiveron un modelo de análise discriminante que utilizando dúas variables (un factor coagulante e o seu antíxeno), permita decidir con alta probabilidade de éxito se unha muller con historial clínico descoñecido era ou non portadora da hemofilia.

Noutros casos, a síntese da información nunha análise multivariante pode ir encamiñada a explicar estruturas de dependencia entre distintas variables ou incluso entre distintas modalidades dunha variable.

Mención aparte, e con isto se cita a última das grandes aplicacións da Estatística, merece o tema do Control da Calidade. Actualmente esténdese a todo tipo de industrias e de empresas e é un elemento clave utilizado polos consumidores á hora de decidir sobre os produtos e servicios que utiliza. O obxectivo a grandes trazos destes métodos é o asegurar unha correcta calidade en cada paso do proceso de produción. Utiliza unha metodoloxía moderna, a miúdo cun forte soporte de tipo gráfico e que sen dúbida acadará un enorme desenvolvemento no futuro.

Despois desta breve incursión nalgúns dos métodos estatísticos, cremos ter deixado patente que a Estatística é unha ferramenta poderosísima para a toma de decisións. No desenvolvemento das novas tecnoloxías da información e a comunicación permitiu que todos dispoñamos de moitos datos en calquera das actividades da nosa vida; hoxe máis ca nunca, a análise de datos é fundamental para decidir. Por isto, é esencial que unha boa formación inclúa

grandes contidos en técnicas estatísticas, porque os datos, que poden ser de grande axuda para un decisor «educado», poden tamén ser utilizados para manipular a un decisor «ignorante».

Rematamos esta sección cun exemplo que ilustra este último comentario.

Exemplo 6 (Paradoxo de Simpson)

A táboa 7 amósano-la distribución por sexo das solicitudes e admisións de alumnos nunha certa Universidade nun determinado curso académico. Claramente a porcentaxe de alumnos admitidos respecto das solicitudes é maior no grupo das mulleres ca no dos homes, aínda que en termo de número de solicitudes é igual o delas que o deles.

Táboa 7

	SOLICITUDES	ADMITIDOS	%
H	2000	955	47'75%
M	2000	1136	56'8%

Na táboa 8 desagreganse os datos distinguindo tres áreas: Humanidades, enxeñerías e ciencias sociais. O restrinxírmonos a cada unha das áreas. obsérvase algo que nun principio pode sorprendernos: tanto en humanidades coma nas enxeñerías, coma nas ciencias sociais, a porcentaxe de homes que son admitidos é superior ó das mulleres que son admitidas.

Táboa 8

		SOLICITUDES	ADMITIDOS	%
HUM.	H	300	225	75%
	M	800	560	70%
ENX.	H	700	140	20%
	M	200	36	18%
SOC.	H	1000	590	59%
	M	1000	540	54%

A razón que explica esta aparente contradicción tópase no feito de que, ó restrinxírmonos ás diferentes áreas, xa non coincide o número de solicitudes efectuadas polos homes cos efectuados polas mulleres.

A conclusión é que cando analicémo-los datos nun problema de toma de decisións estes deben ser considerados sempre ó mesmo nivel no que se toma a decisión, xa que ó examinar datos de forma agregada, aínda a pesares da simplificación que isto supón, pode conducirnos a conclusións erróneas.

7. ALGUNHAS APLICACIÓNS REAIS DOS MÉTODOS MATEMÁTICOS DE DECISIÓN

Polos exemplos que presentamos nas diferentes seccións deste artigo, poderíamos dar a sensación de que os métodos matemáticos de decisión só serven para abordar «pequenos problemas», interesantes dende o punto de vista teórico, pero moi afastados da realidade. Se se presentaron exemplos sinxelos foi polo carácter divulgativo deste traballo. Sen embargo, o uso das técnicas matemáticas de decisión é demandado cada vez máis polas empresas, a administración e tódolos estamentos da sociedade. Como ilustración desta afirmación queremos rematar este artigo presentando algunhas empresas públicas ou privadas coas que recentemente colaborou o Departamento de Estatística e Investigación Operativa da Universidade de Santiago de Compostela como:

- Endesa

Un problema co que se enfrontan as Centrais Térmicas é o da contaminación que xeran e que deben evitar na medida do posible. En concreto, é importante predici-los niveis altos de inmisión, é dicir, de emisión de dióxido de xofre, para toma-la medidas axeitadas antes de que se superen determinados umbrais. Neste estudio sobre a predicción de inmisión, aplicáronse técnicas de análise multivariante, series temporais e ferramentas máis modernas, coma os denominados modelos de estatística espacial e as redes neurais.

- Ferrovie dello Stato

Unha cuestión da que tradicionalmente se ocupou a Teoría de Xogos Cooperativos é a de deseñar tarifas xustas para os usuarios dun servizo que permitan a amortización total ou parcial da construción e mantemento do mesmo.

Con ocasión da privatización de *Ferrovie dello Stato*, a compañía de ferrocarrís italianos, prantexouse o problema das tarifas que debían pagar os operadores que fixeran uso das infraestruturas ferroviarias, así coma a elaboración dun programa informático que permitira xestionar axeitadamente ditas tarifas. Neste estudio aplicáronse técnicas da Teoría de Xogos.

- Sergas

Un campo particular de aplicación da Estatística á Medicina é a epidemioloxía na que, a grandes trazos, se trata de estudar a evolución dunha situación sanitaria en «poboacións» humanas. É longa xa a colaboración entre o Departamento de Estatística e Investigación Operativa da Universidade de Santiago de Compostela e o grupo de investigación de epidemiólogos do Servicio Galego de Saúde. A colaboración non se reduce ó puro asesoramento estatístico, senón que desta colaboración xurdiron tamén a elaboración de de software específico para problemas epidemiolóxicos.

- Instituto Galego de Estatística

Tamén é sabido que a industria do Turismo ten grande importancia no noso país. Para a toma de decisións neste ámbito é esencial coñecer certas características, como o gasto que realizan os turistas que visitan Galicia, os motivos da súa viaxe ou o seu grao de satisfacción trala visita. Mensualmente o Departamento de Estatística e Investigación Operativa realiza para o Instituto Galego de Estatística unha análise de datos relativos a turistas que pernoctan en hoteis de tres, catro ou cinco estrelas. Estes datos obtéñense polo procedemento da enquisa nunha mostra de toda a poboación considerada. Os datos recollen información sobre determinadas variables de interese e son estudados por medio de técnicas de Inferencia e Análise de Datos.

- Turgalicia S.A.

Coa empresa Turgalicia S.A., o Departamento realizou tamén traballos relacionados co turismo en Galicia. Nun dos traballos, a poboación de interese está constituída polos turistas que visitan Galicia na temporada estival. Realizáronse outro tipo de enquisas para Turgalicia S.A., a un tipo concreto de turistas que non efectúan pernoctacións, xenericamente denominados excursionistas, e tamén a denominada enquisa de orixe que pretende cuantificar con precisión a orixe dos turistas que visitan Galicia.

- Consellería de Medio Ambiente

Un problema co que recentemente se encontran as Institucións Públicas é o da toma de decisións relacionada coa xestión dos residuos, tanto os urbanos coma os industriais, os ambientais ou os procedentes da agricultura. Neste tema, as Institucións Públicas están tratando de tomar decisións nun modo rigoroso e eficaz. A través de diversos proxectos, profesores deste Departamento e membros doutras empresas asesoraron á Consellería de Medio Ambiente na caracterización dos residuos sólidos urbanos, o que é moi importan-

te pois permite unha correcta distribución dos contedores dos diferentes tipos, así coma o tratamento posterior dos residuos nas Plantas construídas a tal efecto. Outro tema no que se traballou é o estudo dos riscos ós que se topa sometido o medio ambiente. Actualmente estase levando a cabo un traballo no ámbito dos residuos agrícolas, relativo á caracterización e tratamento dos mesmos.

- Ferroatlántica

Esta empresa, que se dedica á fabricación de Aluminio, fai uso da enerxía eléctrica xerada na Central do río Xallas. Como é natural, posto que o encoro da Central se abastece de auga procedente de precipitacións e outros medios de afluencia, é moi importante prever os fortes incrementos destas afluencias porque poden provocar unha considerable enchente do encoro. A necesidade de apertura das comportas supón entón unha perda de recursos que poderían xerar electricidade, co conseguinte custo económico para a empresa. facendo uso de series temporais e modelos de redes neurais pódese realizar un estudio de predicción de fortes enchentes no encoro.

BIBLIOGRAFÍA

- Anderson, D R, Sweeney, D J and Williams, A (1993) Introducción a los modelos cuantitativos para administración. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cuadras, C M (1991) Métodos de Análisis Multivariante. PPU
- Fdz. de Trocóniz, A. (1987) Modelos Lineales. Servicio Editorial Universidad del País Vasco.
- French, S (1986) Decisión Theory. An introduction to the mathematics of rationality. Ellis Horwood Limited.
- Friedman, J W (1991) Teoría de Juegos con aplicaciones a la Economía. Alianza Editorial.
- Gillies, D B (1953) Some theorems on n-person games. Tesis doctoral, Universidad de Princeton.
- Gomperts, E D y otros (1976) Factor VIII and Factor VIII related antigen in normal South African blacks and a black carrier group. Thrombosis Research, 9: 293-299.
- Hillier, F S y Lieberman, G J (1991) Introducción a la Investigación de Operaciones. McGraw-Hill.
- Kelly, J S (1987) Social Choice Theory. An Introduction. Springer-Verlag.
- Myerson, R B (1991) Game Theory. Analysis of Conflict. Harvard University Press.

-
- Nash, J F (1950) Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the National Academy of Sciences, 36: 48-49.
- Newbold, P (1998) Estadística para los Negocios y la Economía. Prentice Hall.
- Peña, D (1995) Estadística. Modelos y métodos. Tomo 1: Fundamentos. Alianza Universidad.
- Ríos, S (1977) Métodos Estadísticos. Ediciones del Castillo.
- Ríos, S (1976) Análisis de Decisiones. ICE Ediciones.
- Shapley, L S (1953) A value for n-person games. Contributions to the Theory of Games II, H W Karlin y A W Tucker, editores, Princeton, Princeton University Press: 307-317.
- Tanur, J M y otros (1989) La Estadística. Una guía de lo desconocido. Alianza Editorial.
- Von Neumann, J (1928) Zur Theorie der Gesellschaftspiele. Mathematische Annalen, 100: 295-320.
- Von Neumann, J and Morgenstern, O (1944) Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press.